## 基础课60 二项分布、超几何分布、正态分布

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 二项分布 | 掌握 | 2023年新高考Ⅱ卷 | ★★★ | 逻辑推理数学运算 |
| 超几何分布 | 理解 | 2023年全国甲卷（理） | ★☆☆ | 逻辑推理数学运算 |
| 正态分布 | 了解 | 2022年新高考Ⅱ卷年新高考Ⅱ卷 | ★★☆ | 逻辑推理数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，这三个分布主要出现在解答题中.命题热点是以离散型随机变量为载体，常常与离散型随机变量的数字特征交汇，综合性较强.预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、*n*重伯努利试验与二项分布

1*.n*重伯努利试验

一般地,在相同条件下重复做*n*次伯努利试验,且每次试验的结果都①不受其他试验结果的影响,称这样的*n*次独立重复试验为②*n*重伯努利试验*.*

2*.*二项分布

一般地,在*n*重伯努利试验中,用*X*表示这*n*次试验中成功的次数,且每次成功的概率均为*p*,则*X*的分布列可以表示为*P*(*X=k*)*=*③*pk*(1*-p*)*n-k*(*k=*0,1,2,…,*n*)*.*

若一个随机变量*X*的分布列如上所述,则称*X*服从参数为*n*,*p*的二项分布,简记为④*X~B*(*n*,*p*)*.*显然,两点分布是二项分布在参数*n=*1时的特殊情况*.*

二、两点分布与二项分布的均值、方差

若随机变量*X*服从参数为*p*的两点分布,则*EX=p*,*DX=*⑤*p*(1*-p*)*.*若*X~B*(*n*,*p*),则*EX=np*,*DX=*⑥*np*(1*-p*)*.*

三、超几何分布

一般地,设有*N*件产品,其中有*M*(*M*≤*N*)件次品,从中任取*n*(*n*≤*N*)件产品,用*X*表示取出的*n*件产品中次品的件数,那么*P*(*X=k*)*=*⑦,max{0,*n-*(*N-M*)}≤*k*≤min{*n*,*M*}*.*其中*n*≤*N*,*M*≤*N*,*n*,*M*,*N*∈N*+.*若一个随机变量*X*的分布列由上式确定,则称随机变量*X*服从参数为*N*,*M*,*n*的超几何分布*.*一般地,当随机变量*X*服从参数为*N*,*M*,*n*的超几何分布时,其均值为*EX=.*

四、正态分布

1*.*定义

由误差引起的连续型随机变量的分布密度函数图象的解析式为*φμ*,*σ*(*x*)*=*,*x*∈(*-∞*,*+∞*),其中实数*μ*,*σ*(*σ>*0)为参数,这一类随机变量*X*的分布密度(函数)称为正态分布密度(函数),简称⑧正态分布,对应的图象为正态分布密度曲线,简称正态曲线*.*如果随机变量*X*服从正态分布,那么这个正态分布完全由参数*μ*,*σ*(*σ>*0)确定,记为*X~N*(*μ*,*σ*2)*.*其中*EX=μ*,*DX=σ*2*.*

2*.*正态曲线的性质

(1)曲线在*x*轴的上方,与*x*轴不相交*.*

(2)曲线是单峰的,关于直线⑨*x=μ*对称*.*

(3)曲线的最高点位于⑩*x=μ*处*.*

(4)当*x<μ*时,曲线上升;当*x>μ*时,曲线下降;并且当曲线向左、右两边无限延伸时,以*x*轴为渐近线*.*

(5)当*σ*一定时,曲线的位置由*μ*确定,曲线随着*μ*的变化而沿*x*轴平移*.*

(6)当*μ*一定时,曲线的形状由*σ*确定*.σ*越大,曲线越“矮胖”,表示总体的分布越分散;*σ*越小,曲线越“高瘦”,表示总体的分布越集中*.*

3*.*正态分布随机变量*X*在三个特殊区间取值的概率:*P*(*μ-σ*≤*X*≤*μ+σ*)≈0*.*6826;*P*(*μ-*2*σ*≤*X*≤*μ+*2*σ*)≈0*.*9544;*P*(*μ-*3*σ*≤*X*≤*μ+*3*σ*)≈0*.*9974*.*

在实际应用中,通常认为服从正态分布*N*(*μ*,*σ*2)的随机变量*X*只取区间(*μ-*3*σ*,*μ+*3*σ*)之间的值,并称之为3*σ*原则

#### *.*诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 表示次重复抛掷1枚骰子出现点数是3的倍数的次数，则服从二项分布.( √ )

（2） 从4名男演员和3名女演员中选出4人，其中女演员的人数服从超几何分布.( √ )

（3） 重伯努利试验中各次试验的结果相互独立.( √ )

（4） 正态分布是对连续型随机变量而言的.( √ )

2. （易错题）甲、乙两名羽毛球运动员之间要进行三场比赛，且这三场比赛可看作三重伯努利试验，若甲至少取胜一次的概率为，则甲恰好取胜一次的概率为( C ).

A. B. C. D.

【**易错点**】本题容易混淆概率模型.

[解析]设“甲取胜”为事件，每次甲胜的概率为，由题意得，事件发生的次数，则有，得，则事件恰好发生一次的概率为.故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修 练习（2）改编）已知在100件产品中有5件次品，有放回地任意抽取20件，设表示这20件产品中的次品数，则( B ).

A. B. C. D.

[解析]有放回地抽取，每次取到次品的概率都是，相当于20次独立重复的伯努利实验，所以服从二项分布.故选.

4. （双空题）（人教A版选修改编）若将一枚质地均匀的硬币连续抛掷4次，表示“正面朝上”出现的次数,则2，1.

[解析]一枚质地均匀的硬币抛掷一次正面朝上的概率为，且每次是否正面朝上相互独立，所以，所以,.

##### 题组3 走向高考

5. [2022年新高考Ⅱ卷]已知随机变量服从正态分布，且，则0.14.

[解析]由题意可知，，故.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 重伯努利试验与二项分布［自主练透］

1. 根据调查可知，大学生创业成功与失败的概率分别为，，且，则某高校四名大学生毕业后自主创业，其中至少有两名大学生创业成功的概率为( B ).

A. B. C. D.

[解析]由题意解得则四名大学生中至少有两名创业成功的概率.故选.

2. 体育课上进行投篮测试，每人投篮3次，至少投中1次则通过测试.某同学每次投中的概率为，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为( D ).

A. 0.064 B. 0.600 C. 0.784 D. 0.936

[解析]该同学通过测试的概率为，故选.

3. [2024·武汉质检]某省推出的高考新方案是“”模型，“3”是语文、外语、数学三科必考，“1”是在物理与历史两科中选择一科，“2”是在化学、生物、政治、地理四科中选择两科作为高考科目.某学校为做好选课走班教学，给出三种可供选择的组合进行模拟选课，其中组合：物理、化学、生物；组合：历史、政治、地理；组合：物理、化学、地理.根据选课数据得到，选择组合的概率为，选择组合的概率为，选择组合的概率为，甲、乙、丙三位同学每人选课是相互独立的.

（1）求这三位同学恰好选择互不相同的组合的概率；

（2）记 表示这三人中选择含地理的组合的人数，求 的分布列及数学期望.

[解析]用表示“第位同学选择组合”，用表示“第位同学选择组合”，用表示“第位同学选择组合”，，2，3.

由题意可知，，，相互独立，

且，，.

（1）三位同学恰好选择不同的组合共有种情况，每种情况的概率相同，故三位同学恰好选择不同组合的概率.

（2）由题意知， 的所有可能取值为0，1，2，3，且，

所以，

，

，

，

所以 的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

所以.



1.重伯努利试验概率的解题策略

（1）首先判断问题中涉及的试验是否为重伯努利试验，判断时注意各次试验之间是否相互独立，并且每次试验的结果是否只有两种，在任何一次试验中，某一事件发生的概率是否都相等，全部满足才能用相关公式求解；

（2）解此类题时常用互斥事件概率加法公式，相互独立事件概率乘法公式及对立事件的概率公式.

2.判断某随机变量是否服从二项分布的关键点

（1）在每一次试验中，事件发生的概率相同.

（2）各次试验中的事件是相互独立的.

（3）在每一次试验中，试验的结果只有两个，即发生与不发生.

#### 考点二 超几何分布［师生共研］

典例1 某公司为了提高服务质量，决定对使用，两种套餐的集团用户进行调查，准备从本市个人数超过1000人的大集团和4个人数低于200人的小集团中随机抽取若干个集团进行调查.若一次抽取2个集团，则全是小集团的概率为.

（1）在取出的2个集团是同一类集团的情况下，求全为大集团的概率；

（2）若一次抽取3个集团，假设取出小集团的个数为，求的分布列和期望.

[解析]（1）由题意知共有个集团，取出2个集团的方法总数是，其中全是小集团的情况有种，故全是小集团的概率是，

整理得到，即，解得（负值舍去）.

若2个全是大集团，则共有种情况；

若2个全是小集团，则共有种情况.

故在取出的2个集团是同一类集团的情况下，全为大集团的概率为.

（2）由题意知，随机变量的所有可能取值为0,1,2,3，

则，，

，，

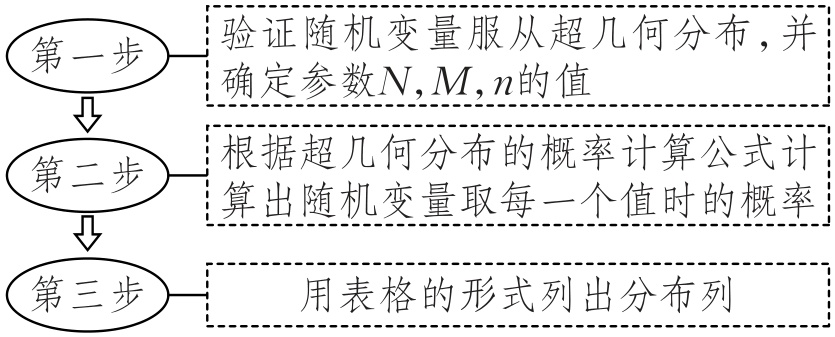
故的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

数学期望.



**求超几何分布的分布列的三个步骤**



##### 针对训练

[2024·盐城模拟]端午节吃粽子是我国的传统习俗.设一盘中有10个粽子，其中豆沙粽2个，肉粽3个，白粽5个，这三种粽子的外观完全相同.从中任意选取3个.

（1） 求三种粽子各取到1个的概率；

[解析]令表示事件“三种粽子各取到1个”，

则由古典概型的概率计算公式有.

（2） 设表示取到的豆沙粽个数，求的分布列，并求.

[解析]的所有可能值为0，1，2，且，，.

所以的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

所以.

#### 考点三 正态分布［师生共研］

典例2 已知随机变量服从正态分布，若，则0.4.

[解析]由题可知，，，

所以.

典例3 某车间生产一批零件，现从中随机抽取10个零件，测量其内径（单位：）,数据如下：

87，87，88，92，95，97，98，99,103,104.

设这10个数据的平均值为 ，标准差为 .

（1）求 与 值.

（2）假设这批零件的内径（单位：）服从正态分布.

①从这批零件中随机抽取10个，设这10个零件中内径大于的个数为，求.（结果保留5位有效数字）

②若该车间又新购了一台设备，安装调试后，试生产了5个零件，测得内径（单位：）分别为76，85，93，99，108，以原设备生产性能为标准，试问这台设备是否需要进一步调试?请说明你的理由.

参考数据：若，则，，.

[解析]（1），，.

（2）①服从正态分布，

，

则，

，

.

②服从正态分布，

，

个零件的内径中恰有一个不在内的概率为.

，

试生产的5个零件的内径就出现了1个不在内，出现的频率是0.01287的15倍多，

根据 原则，需要进一步调试.



**解决正态分布问题的三个关键点**

1.对称轴为直线 ；

2.标准差 ；

3.分布区间.

利用对称性可求指定范围内的概率值,由 ， ，分布区间的特征进行转化，使分布区间转化为 特殊区间，从而求出所求概率.注意只有在标准正态分布下对称轴才为直线.

##### 针对训练

1. （多选题）已知随机变量，且，则下列说法正确的是( AC ).

A. B.

C. 函数的最大值为1 D. 的正态曲线关于对称

[解析]因为随机变量，

所以的正态曲线关于直线对称，故错误；

,，

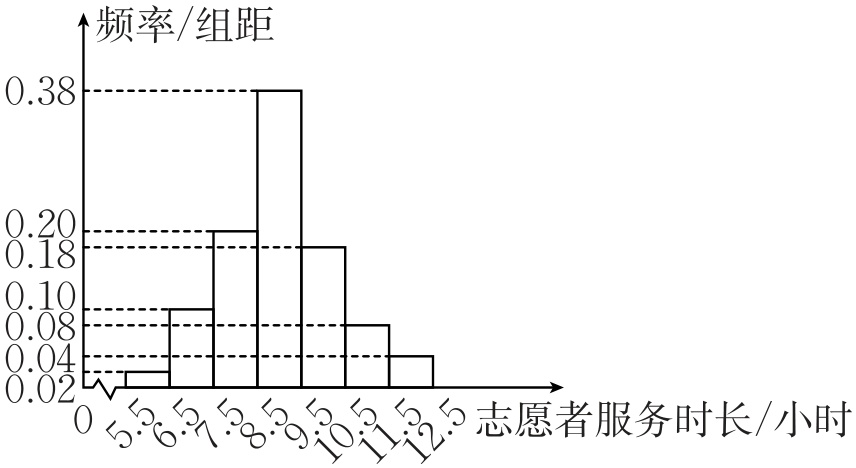
所以，

又，所以，故正确，错误；

，

当时，函数取得最大值1，故正确.故选.

2. 为了了解某地志愿者对志愿服务的认知和参与度，随机调查了500名志愿者每月的志愿服务时长（单位：小时），并绘制如图所示的频率分布直方图.



（1）估计这500名志愿者每月志愿服务时长的样本平均数和样本方差（同一组中的数据用该组数据区间的中间值代表）.

（2）由频率分布直方图可以认为，目前该地志愿者每月服务时长服从正态分布，其中 近似为样本平均数，近似为样本方差.一般正态分布的概率都可以转化为标准正态分布的概率进行计算：若，令，则，且.

①利用由频率分布直方图得到的正态分布，求；

②从该地随机抽取20名志愿者，记表示这20名志愿者中每月志愿服务时长超过10小时的人数，求（结果精确到）以及的数学期望（结果精确到）.

参考数据：，，，，.若，则，，.

[解析]（1），

.

（2）①由题意并结合（1）可知，，，

，

.

②由①可知，，

，

，.

### 拓展教材 深度学习

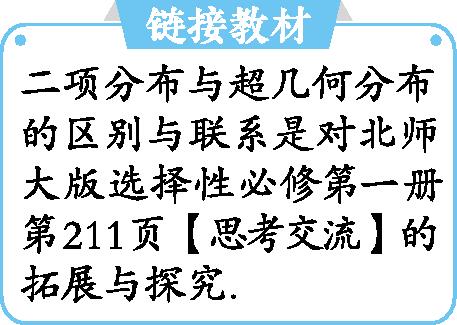
**二项分布与超几何分布的区别与联系**

二项分布和超几何分布是两类重要的概率模型，二者的区别与联系：

①超几何分布需要知道总体的容量，而二项分布不需要；

②超几何分布是不放回地抽取，而二项分布是有放回地抽取（独立重复）；

③当总体的容量非常大时，超几何分布近似于二项分布.



典例 设某产品总个数为（无限大），且正品个数为，则正品率，求证：在,不变的条件下，.

[解析]，

因为,,

且,

,所以.

深度训练1 在装有4个黑球，6个白球的袋子中，任取2个球，试求：

（1）不放回地抽取，取到黑球数的分布列及数学期望；

（2）有放回地抽取，取到黑球数的分布列及数学期望.

[解析]（1）不放回地抽取，服从超几何分布.从10个球中任取2个的方法数为，从10个球中任取2个，其中恰有个黑球的方法数为，则从10个球中任取2个，其中恰有个黑球的概率为，，1，2，

得随机变量的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

则.

（2）有放回地抽取，每次抽到黑球的概率相同，所以，那么从10个球中任取2个，其中恰有个黑球的概率为，，1，2，

所以随机变量的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 0.36 | 0.48 | 0.16 |

则.

深度训练2 某批件产品的次品率为，现从中任意抽取3件进行检验.问：当，5000，50000时，分别以放回和不放回的方式抽取，恰好抽到1件次品的概率各是多少？你能从中得到什么结论？

[解析]（1）当有放回地抽取时，次品数，

.

（2）当无放回地抽取时，服从超几何分布，

当时，，

当时，，

当时，.

故当总体的容量非常大时，超几何分布近似于二项分布.